

## الوحدة الرابعة : التكامل وتطبيقاته :

مثال (١) :

$$\int (2\sqrt{x} + 3x^2) dx$$

الحل :

$$\int (2\sqrt{x} + 3x^2) dx =$$

$$\int 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^2 dx =$$

$$= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{3x^3}{3} =$$

مثال (٢) :

$$(2) \text{ اذا كان } \int_0^1 (x^2 - 3x) dx = 4, \text{ فما قيمة } x$$

$$\int_0^1 (x^2 - 3x) dx = 4 \text{ ، جد } x$$

الحل :

$$\int_0^1 (x^2 - 3x) dx = 4 \Rightarrow \int_0^1 x^2 dx - 3 \int_0^1 x dx = 4$$

$$= \left( \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 4$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{3}{2} = 4 \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{3}{2} = 4$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{3}{2} = 4 \Rightarrow \frac{1}{3} - \frac{3}{2} = 4$$

المطلوب :

$$\int_0^1 (x^2 - 3x) dx = 4 \Rightarrow \int_0^1 x^2 dx - 3 \int_0^1 x dx = 4$$

$$14 = (6 - 2) + 20 =$$

المطلوب النهائي :

$$\int_0^1 (x^2 - 3x) dx = 4 \Rightarrow \int_0^1 x^2 dx - 3 \int_0^1 x dx = 4$$

$$= \int_0^1 (x^2 - 3x) dx = 4$$

$$124 = 18 - 128 + 14 = \int_0^1 \left( \frac{x^2}{2} + 14 \right) dx$$

مثال (٣) :

$$(1) \text{ اذا كان } \int_0^1 (2x^2 + 6x) dx = 0, \text{ فما قيمة } x$$

الحل :

$$0 = \int_0^1 \left( \frac{2x^2}{2} + \frac{6x}{1} \right) dx =$$

$$0 = \left( \frac{x^3}{3} + \frac{6x^2}{2} \right) \Big|_0^1 =$$

$$3 \times 0 = \frac{1}{3} - \frac{6}{2} + \frac{6}{2} =$$

$$0 = 11 - 2 \times 9 + 2 \times 2$$

بالتجريب ج = 1 ← قسمة تركيبيّة

$$0 = (11 + 2 \times 1 + 2 \times 2)(1 - 2)$$

ثابت	ج	ج <sup>٢</sup>	ج <sup>٣</sup>
١١-	٠	٩	٢
١١	١١	٢	١
صفر	١١	١١	٢

المميز = ب<sup>٢</sup> - ٤ × ج × ج = ١٤ × ٢ × ٤ - ١٢١ =

$$33 =$$

$$\frac{33 \pm 11}{4} = \frac{\sqrt{\text{المميز}} \pm \text{ب}}{2 \times \text{ج}} = \text{القانون العام}$$

$$\{ \frac{33 \pm 11}{4}, 1 \} = \text{قيم ج}$$

$$(2) \text{ اذا كان } \int_0^1 (2x^2 + 6x) dx = 0, \text{ فما قيمة } x$$

فما قيمة (ج)

الحل :

$$\frac{2x^3}{3} = 0 - \frac{2x^3}{3} = \int_0^1 \left( \frac{2x^2}{2} + 6x \right) dx$$

$$\left[ \sqrt[3]{s-1} - s \right]_{-1}^1 \geq 0$$

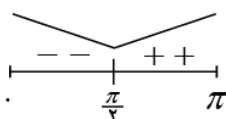
مثال (5) :

$$\text{احسب } \left[ \sqrt[3]{s-1} - s \right]_{-1}^{\pi}$$

الحل :

$$\text{وه } (s) = \sqrt[3]{s-1} - s$$

$$\text{وه } (s) = -s = 0$$



$$\leftarrow s = \frac{\pi}{4}$$

$$s = 0 \leftarrow \text{قيمة عظمية وه } (0) = 3$$

$$s = \frac{\pi}{4} \leftarrow \text{قيمة صغرى وه } \left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

$$s = \pi \leftarrow \text{قيمة عظمية وه } (\pi) = 3$$

$$2 \leq \sqrt[3]{s-1} - s \leq 3$$

$$\left[ \sqrt[3]{s-1} - s \right]_{-1}^{\pi} \geq \left[ \sqrt[3]{s-1} - s \right]_{-1}^{\pi} \geq \left[ \sqrt[3]{s-1} - s \right]_{-1}^{\pi}$$

$$\pi 2 \leq \left[ \sqrt[3]{s-1} - s \right]_{-1}^{\pi} \leq \pi 3$$

$$\text{اكبر قيمة } \pi 3$$

مثال (6) :

(12) اذا كان  $3 \leq \text{وه } (s) \leq 6$  لكل  $[2, 4]$  ، فما قيم

$$m, n, \text{ بحيث } m \leq \left[ \sqrt[3]{s-1} - s \right]_{-1}^4 \leq n$$

الحل :

$$3 \leq \text{وه } (s) \leq 6 \times \text{سالب}$$

$$-3 \leq \text{وه } (s) \leq -6 + 5$$

$$2 \leq -5 \leq \text{وه } (s) \leq -1 \text{ تكامل } [2, 4]$$

$$\left[ \sqrt[3]{s-1} - s \right]_{-1}^2 = 2 - \frac{2^3}{3} = -\frac{10}{3}$$

$$\left[ \sqrt[3]{s-1} - s \right]_{-1}^3 = 3 - \frac{3^3}{3} = -24$$

$$= \left[ \sqrt[3]{s-1} - s \right]_{-1}^3 = 3 - \frac{3^3}{3} = -24$$

$$(27 - 2) - (1 - 1) = 25$$

$$= 28 - 2 = 26 \leftarrow \frac{2}{3} = 48$$

$$\leftarrow \frac{2}{3} = 4 \leftarrow \frac{2}{3} = 4$$

مثال (8) :

بين ان  $\left[ \sqrt[3]{s-1} - s \right]_{-1}^1$  ينحصر بين العددين

صفر، (2)

الحل :

نجد القيم الصغرى والعظمى حيث :

$$\text{وه } (s) = \sqrt[3]{s-1} - s \text{ على } [-1, 1]$$

$$\text{وه } (s) = \frac{2-s}{\sqrt[3]{s-1}} = 0$$

$$\text{اصفار البسط : } 2-s = 0 \leftarrow s = 2$$

$$\text{اصفار المقام : } 1-s = 0 \leftarrow s = 1$$

القيم الحرجة :  $\{1, 2, -1\}$

$$\text{وه } (0) = 1 \leftarrow \text{اكبر قيمة}$$

$$\text{وه } (1) = 0 \leftarrow \text{اصغر قيمة}$$

$$\text{وه } (1) = 0 \leftarrow \text{اصغر قيمة}$$

$$\leftarrow 0 \leq \text{وه } (s) \leq 1$$

$$\leftarrow 0 \leq \sqrt[3]{s-1} - s \leq 1 \text{ لكل } s \in [-1, 1]$$

$$\left[ \sqrt[3]{s-1} - s \right]_{-1}^1 \geq \left[ \sqrt[3]{s-1} - s \right]_{-1}^1 \geq \left[ \sqrt[3]{s-1} - s \right]_{-1}^1$$

$$12 = 0 - \frac{(2)^3}{4} = \frac{1}{4} \left[ \frac{3s^4}{4} = \right]$$

مثال (٩) :

جد قيمة التكاملات الآتية :

$$(1) \int \frac{\text{جاس}^2}{\text{جاس}^2 \text{جاس}^2} ds$$

الحل :

$$= \int \frac{\text{جاس}^2 - \text{جاس}^2}{\text{جاس}^2 \text{جاس}^2} ds$$

$$= \int \frac{\cancel{\text{جاس}^2}}{\cancel{\text{جاس}^2} \text{جاس}^2} - \frac{\cancel{\text{جاس}^2}}{\cancel{\text{جاس}^2} \text{جاس}^2} ds$$

$$= \int \frac{1}{\text{جاس}^2} - \frac{1}{\text{جاس}^2} ds$$

$$= \int \text{قاس}^2 - \text{قاس}^2 ds = -\text{ظناس} - \text{ظاس} + \text{ج}$$

$$(2) \int \sqrt{1 + \text{جاس}^2} ds$$

الحل :

$$= \int \sqrt{1 + \text{جاس}^2 + \text{جاس}^2} ds$$

$$= \int \sqrt{(\text{جاس} + \text{جاس})(\text{جاس} + \text{جاس})} ds$$

$$= \int \sqrt{(\text{جاس} + \text{جاس})^2} ds$$

$$= \int |\text{جاس} + \text{جاس}| ds \quad \text{موجب لأننا بالربع الاول}$$

$$= \int (\text{جاس} + \text{جاس}) ds = \text{جاس} + \text{جاس} = 2$$

$$\int_2^4 \frac{1}{s} ds \leq \int_2^4 \frac{1}{s} ds \leq \int_2^4 \frac{1}{s} ds$$

$$\int_2^4 \frac{1}{s} ds \leq \int_2^4 \frac{1}{s} ds \leq \int_2^4 \frac{1}{s} ds$$

$$\leftarrow 2 = 2, \quad 4 = 4$$

مثال (٧) :

$$(3) \text{ احسب } \int_2^3 |s^2 - s^2 - s^2| ds$$

الحل :

$$s^2 - s^2 - s^2 = (s+1)(3-s) \leftarrow 0 = 3 - s^2 - s^2$$

$$\leftarrow s = 3, \quad s = 1$$

$$\int_1^3 (s^2 - s^2 - s^2) ds + \int_2^3 (s^2 - s^2 - s^2) ds$$

$$= \left[ \frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3} \right]_1^3 + \left[ \frac{s^3}{3} - \frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{3} \right]_2^3$$

مثال (٨) :

(٩) اذا كان  $m(s)$ ،  $h(s)$  اقترانين معكوسينللاقتران  $h(s)$  و  $m(s)$  وكان  $\int_1^3 (h - m) ds = 12$ فما قيمة  $\int_1^3 s^2 (h - m) ds$ 

الحل :

نفرض  $m - h = j$ ،  $j$  ثابت

$$\leftarrow \int_1^3 (h - m) ds = \int_1^3 j ds = 12$$

$$j = 3 \leftarrow 12 = ((1) - (-3))$$

المطلوب :

$$\int_1^3 s^2 \times j ds = \int_1^3 s^2 ds$$

$$(3) \text{ اذا كانت } \theta = \frac{\pi}{4} \text{ قاس } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ، } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

فما قيمة  $\theta$  -  $\pi$ الحل :

$$\theta - \pi = \frac{\pi}{4} \text{ قاس } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ، } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} &= \sin \left( \frac{\pi}{4} \right) \\ \theta &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$(4) \text{ جاس } \sin \theta$$

الحل :

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sin \left( \frac{\pi}{4} \right) \\ \sin \theta &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ، } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ، } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(5) \text{ جاس } \sin \theta$$

الحل :

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ، } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ، } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ، } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ، } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ، } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(6) \text{ جاس } \sin \theta$$

الحل :

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ، } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ، } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ، } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(7) \text{ جاس } \sin \theta$$

الحل :

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ، } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ، } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ، } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ، } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(8) \text{ جاس } \sin \theta$$

الحل :

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ، } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ، } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ، } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(9) \text{ جاس } \sin \theta$$

الحل :

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ، } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ، } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ، } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال (۱۱) :

جد قيمة التكاملات الآتية :

(۱)  $\left[ \text{قا}^2 \text{س}^4 \text{ظا}^4 \text{س}^4 \text{س}^4 \right]^{\frac{\pi}{\epsilon}}$

### الحل :

نفرض :

$$\frac{\text{ص}^{\text{ص}}}{\text{قا}^{\text{ص}}} = \text{ص} \Leftarrow \text{ظا}^{\text{ص}} = \text{ص}$$

س = ، ← ص = ظا ، = ،

$$۱ = \frac{\pi}{4} \text{ ظا} = \text{ص} \leftarrow \frac{\pi}{4} = \text{س}$$

$$\cancel{[C]_S}^1 = \frac{S}{\cancel{C}^2} \times \cancel{C}^2$$

$$\frac{1}{5} = -\frac{1}{5} = \sqrt{\frac{5}{5}} =$$

(۲) اذا كان  $١ = ٣$  ،  $٩ = ١٠$  ، احسب

$$1 + s^2 - s^3$$

### الحل :

نفرض :

$$\frac{S_2}{S_3} = S \Leftarrow 1 + S = S$$

س = ۰ ← ص = ۱ ، س = ۲ ← ص = ۹

$$\int_1^9 \sqrt{x} \, dx = \frac{2}{3} x^{3/2} \Big|_1^9 = \frac{2}{3} (27 - 1) = \frac{52}{3}$$

$$١٤ = (١)٧٢ - (٩)٧٢ = ٩ [ (٧)٧٢ =$$

(۳)  $\left[ \frac{\text{جا}^{\circ}\text{س}}{\text{جتا}^{\vee}\text{س}} \right] \text{س}$

### الحل :

$$[ \text{جا}^{\circ} \text{س} \frac{\text{جا}^{\circ} \text{س}}{\text{جیتا}^{\circ} \text{س}^2 \text{س}} ] = \text{س} [ \text{ظا}^{\circ} \text{س} \text{قا}^2 \text{س}^2 \text{س} ] =$$

$$= \left[ \frac{\cancel{\text{جٹا س جٹا س}}}{\text{جٹا س}} \right]_{\text{س}} - \left[ \frac{\text{جٹا س جٹا س}}{\cancel{\text{جٹا س}}} \right]_{\text{س}}$$

$$= [ج٢ س س - ۲ جاس ج٢اس] \frac{جاس}{ج٢اس}$$

$$= [ج٢س س - ج٢جا س^٢ س]$$

$$= [ج٢س س - س] \times \left( \frac{1}{x} - (ج٢س - ١) \right)$$

$$ج + \left( \frac{جاس}{۲} - س \right) - \frac{جاس}{۲} =$$

مثال (١٠) :

(۱) اذا كان  $12 + 3s + 4s = 5(3s + (s)^{-1})$

وكان  $v = (1)^{\sim}$  ،  $v = (1)$  ، فما قيمة كل

مما يلي :

(۱) ا (ب) و (۲) ج و (۲)

### الحل :

(أ) نشق الطرفين :

$${}^2\text{س}^3 + {}^3\text{س}^4 = {}^2\text{س}^3 + ({}^1\text{س})'$$

لكن :  $\gamma = (1)^\vee$

$$\gamma(\gamma)\beta + \gamma(\gamma)\xi = \gamma(\gamma)\beta + (\gamma)\gamma$$

$$\gamma = \beta \iff \beta\gamma + \varepsilon = \gamma + \gamma$$

(ب)  ${}^2_6\text{S} + {}^3_4\text{S} = {}^2_3\text{S} + ({}^2_2\text{S})$

$${}^2_3s + {}^3_4s = {}^2_3s - {}^2_6s + {}^3_4s = (s)'$$

$$\xi\xi = 1\,2 + 3\,2 = \xi\times 3 + 1\times\xi = (2)'\,2$$

$$[s^2 + s^3 + s^4] = s(s) \cdot s = (s) \cdot s$$

وہ (س) = س<sup>۴</sup> + س<sup>۳</sup> + ج لکن وہ (۱) = ۳

$$1 = 2 \leftarrow 2 + 1 + 1 = 3$$

$$1 + s^3 + s^4 = (s)$$

$$20 = 1 + 8 + 11 = (2) \sim$$

نفرض :

$$ص = ظاس \Leftarrow س = \frac{ص}{قاس}$$

$$\left[ ص^{\circ} قاس^{\frac{1}{2}} = \frac{ص}{قاس^{\frac{1}{2}}} \right] = ص^{\circ} س$$

$$= \frac{ص}{\frac{1}{6}} + ج = \frac{ص}{6} + ج$$

$$(٤) \left[ جا^{\frac{1}{2}} س - جا^{\frac{1}{2}} س \right] = \frac{جا^{\frac{1}{2}} س}{س}$$

الحل :

$$= \frac{جا^{\frac{1}{2}} س}{(جا^{\frac{1}{2}} س - ١)}$$

$$= \frac{جا^{\frac{1}{2}} س}{(جا^{\frac{1}{2}} س - ١)} = \frac{جا^{\frac{1}{2}} س}{(جا^{\frac{1}{2}} س - ١)}$$

نفرض :

$$ص = \frac{١}{جا^{\frac{1}{2}} س} \Leftarrow س = \frac{ص}{جا^{\frac{1}{2}}}$$

$$\left[ ص^{\frac{1}{2}} جا^{\frac{1}{2}} = \frac{ص}{جا^{\frac{1}{2}}} \right] = \frac{ص}{جا^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{ص}{١ - جا^{\frac{1}{2}}} + ج = \frac{ص}{١ - جا^{\frac{1}{2}}} + ج$$

$$(٥) \left[ قاس^{\circ} ظاس^{\frac{1}{2}} س \right]$$

الحل :

نفرض :

$$ص = قاس \Leftarrow س = \frac{ص}{قاس}$$

$$\left[ ص^{\circ} ظاس^{\frac{1}{2}} س = \frac{ص}{قاس} \right] = \frac{ص}{قاس}$$

$$= \frac{ص}{(١ - س^{\frac{1}{2}})}$$

$$= \frac{ص}{(١ - س^{\frac{1}{2}})} = \frac{ص}{(١ - س^{\frac{1}{2}})}$$

$$= \frac{ص}{٧} + ج - \frac{قاس^{\frac{1}{2}}}{٧} = \frac{ص}{٧} + ج - \frac{قاس^{\frac{1}{2}}}{٧}$$

$$(٦) \left[ \frac{(٣ + س^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{س} \right]$$

الحل :

$$= \frac{(٣ + س^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{س} \times \frac{١}{س} = \frac{(٣ + س^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{س^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{(٣ + س^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{س^{\frac{1}{2}}} \times \frac{١}{س} = \frac{(٣ + س^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{س^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{(٣ + س^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{س^{\frac{1}{2}}} \times \frac{١}{س} = \frac{(٣ + س^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{س^{\frac{1}{2}}}$$

نفرض :

$$ص = \frac{٣}{س} + ٢ \Leftarrow س = \frac{٣}{ص - ٢}$$

$$= \frac{س^{\frac{1}{2}}}{٣ - ص} = س \Leftarrow$$

$$\left[ \frac{١}{٣ - ص} = \frac{س^{\frac{1}{2}}}{٣ - ص} \times \frac{١}{س} \right] = \frac{١}{٣ - ص}$$

$$= \frac{١}{٣ - ص} + ج = \frac{١}{٣ - ص} + ج$$

$$(٧) \left[ \frac{(٣ + س^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{س} \right]$$

الحل :

$$= \frac{(٣ + س^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{س} \times \frac{١}{س} = \frac{(٣ + س^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{س^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{(٣ + س^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{س^{\frac{1}{2}}} \times \frac{١}{س} = \frac{(٣ + س^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{س^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{(٣ + س^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{س^{\frac{1}{2}}} \times \frac{١}{س} = \frac{(٣ + س^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}}{س^{\frac{1}{2}}}$$

نفرض :

$$ص = \frac{٢}{س} + ١ \Leftarrow س = \frac{٢}{ص - ١}$$

$$\left[ \frac{١}{٤ - ص} = \frac{س^{\frac{1}{2}}}{٤ - ص} \times \frac{١}{س} \right] = \frac{١}{٤ - ص}$$

$$= \frac{١}{٤ - ص} + ج = \frac{١}{٤ - ص} + ج$$

$$\begin{aligned} \text{هـ} = \text{س}^2 &\leftarrow \text{س}^2 = \text{هـ} \text{ س} \\ \text{س}^2 = \text{هـ} \text{ س} &\leftarrow \text{هـ} = - \text{جاس} \end{aligned}$$

$$- \text{س}^2 \text{ جاس} + \underbrace{\text{س}^2 \text{ جاس}}_{\text{هـ}} =$$

$$\text{هـ} = \text{س}^2 \leftarrow \text{س}^2 = \text{هـ} \text{ س}$$

$$\text{س}^2 = \text{هـ} \text{ جاس} \leftarrow \text{هـ} = \text{جاس}$$

$$\text{س}^2 \text{ جاس} - \text{س}^2 \text{ جاس} =$$

$$- \text{س}^2 \text{ جاس} + \text{س}^2 \text{ جاس} + \text{جاس} =$$

$$(11) \text{ جاس} (\text{س}^2 + \text{جاس}) = \text{س}^2$$

الحل :

$$\text{س}^2 \text{ جاس} + \text{جاس} \text{ س}^2 \text{ جاس} =$$

$$\text{س}^2 \text{ جاس} + \text{جاس} \text{ س}^2 \text{ جاس} =$$

$$\text{س}^2 \text{ جاس} + \text{جاس} \text{ س}^2 \text{ جاس} =$$

تعويض

اجزاء

$$\text{هـ} = \text{س} \leftarrow \text{س} = \text{هـ} \text{ س}$$

$$\text{س} = \text{جاس} \leftarrow \text{جاس} = \text{هـ} \text{ س}$$

$$\text{س} = \text{جاس} \leftarrow \text{جاس} = \text{هـ} \text{ س}$$

$$\text{س}^2 \text{ جاس} - \text{س}^2 \text{ جاس} + \text{جاس} \text{ س}^2 \text{ جاس} =$$

$$\text{س}^2 \text{ جاس} - \text{س}^2 \text{ جاس} + \text{جاس} \text{ س}^2 \text{ جاس} =$$

$$\text{س}^2 \text{ جاس} - \text{س}^2 \text{ جاس} + \text{جاس} \text{ س}^2 \text{ جاس} =$$

$$\text{س}^2 \text{ جاس} - \text{س}^2 \text{ جاس} + \text{جاس} \text{ س}^2 \text{ جاس} =$$

$$(12) \text{ جاس} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} - \frac{\text{جاس}}{\text{س}} =$$

الحل :

$$\text{س}^2 \text{ جاس} - \text{س}^2 \text{ جاس} =$$

$$\text{هـ} = \text{جاس} \leftarrow \text{س} = \text{هـ} \text{ جاس}$$

$$\text{س} = \text{جاس} \leftarrow \text{س} = \text{هـ} \text{ جاس}$$

$$(8) \text{ س}^2 (\text{س}^2 + \text{س}^2) (\text{س}^2 + \text{س}^2) = \text{س}^2$$

الحل :

$$\text{س}^2 (\text{س}^2 + \text{س}^2) (\text{س}^2 + \text{س}^2) =$$

$$\text{س}^2 (\text{س}^2 + \text{س}^2) (\text{س}^2 + \text{س}^2) =$$

نفرض :

$$\text{س} = \text{س}^2 \leftarrow \text{س} = \text{س}^2$$

$$\text{س}^2 (\text{س}^2 + \text{س}^2) (\text{س}^2 + \text{س}^2) =$$

$$\text{س}^2 (\text{س}^2 + \text{س}^2) (\text{س}^2 + \text{س}^2) =$$

$$\text{س}^2 (\text{س}^2 + \text{س}^2) (\text{س}^2 + \text{س}^2) =$$

$$\text{س}^2 (\text{س}^2 + \text{س}^2) (\text{س}^2 + \text{س}^2) =$$

$$(9) \text{ س}^2 \frac{1}{1-\text{س}} \frac{1}{1-\text{س}} =$$

الحل :

نفرض :

$$\text{س} = \text{س}^2 \leftarrow \text{س} = \text{س}^2$$

$$\text{س}^2 (\text{س}^2 + \text{س}^2) (\text{س}^2 + \text{س}^2) =$$

$$\text{س}^2 (\text{س}^2 + \text{س}^2) (\text{س}^2 + \text{س}^2) =$$

$$\text{س}^2 (\text{س}^2 + \text{س}^2) (\text{س}^2 + \text{س}^2) =$$

$$\text{س}^2 (\text{س}^2 + \text{س}^2) (\text{س}^2 + \text{س}^2) =$$

$$\text{س}^2 (\text{س}^2 + \text{س}^2) (\text{س}^2 + \text{س}^2) =$$

(اجزاء مرتين)

$$(10) \text{ س}^2 \text{ جاس} =$$

الحل :

$$\text{س}^2 \text{ جاس} =$$

$$\begin{aligned} & \text{جاس} \times \frac{1-}{\text{س}} - \left[ \frac{1-}{\text{س}} \text{جاس} - \text{س} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} \right] \\ & \frac{\text{جاس}}{\text{س}} - \left[ \frac{\text{جاس}}{\text{س}} - \text{س} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} \right] \\ & \frac{\text{جاس}}{\text{س}} + \frac{\text{جاس}}{\text{س}} = \end{aligned}$$

$$(13) \text{ اذا كان } \text{وه} = (1) = 6, \text{ } \left[ \text{وه} (\text{س}) \text{س} \right] = 4$$

$$\text{اوجد } \left[ \text{جاس}^2 \text{وه} \right] (\text{جاس}) \text{س}$$

الحل :

$$\begin{aligned} \text{ص} = \text{جاس} \leftarrow \text{س} &= \frac{\text{س}}{\text{جاس}} \\ \text{س} = 0 \leftarrow \text{ص} = 0, \text{ } \text{س} = \frac{\pi}{4} \leftarrow \text{ص} = 1 \end{aligned}$$

$$\left[ 2 \text{جاس} \text{جاس}^2 \text{وه} \right] (\text{ص}) \frac{\text{س}}{\text{جاس}}$$

$$= \left[ 2 \text{ص}^2 \text{وه} \right] (\text{ص}) \frac{\text{س}}{\text{ص}} \text{ (اجزاء)}$$

$$= 2 (\text{ص} \text{وه} (\text{ص})) \left[ 1 - \text{وه} (\text{ص}) \right]$$

$$= 2 (1 - 0 - 6 \times 1) = 2 (-6) = -12$$

مثال (12) :

$$\begin{aligned} & \text{اذا كان } \text{وه} (\text{س}) \times \text{جاس} - \text{وه} (\text{س}) \text{جاس} = 0 \text{ وكان} \\ & \text{وه} \left( \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}, \text{ فما قيمة } \text{وه} \left( \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

الحل :

$$\text{وه} (\text{س}) \times \text{جاس} = \text{وه} (\text{س}) \text{جاس}$$

$$\text{وه} (\text{س}) \times \text{جاس} = \frac{\text{جاس}}{\text{وه} (\text{س})}$$

$$\frac{\text{جاس}}{\text{جاس}} = \frac{\text{وه} (\text{س})}{\text{وه} (\text{س})} \text{ (نكامل الطرفين)}$$

$$\left[ \text{وه} (\text{س}) \right] \text{س} = \left[ \text{جاس} \right] \text{س}$$

$$\text{لوه} (\text{س}) = \left[ \text{جاس} \right] + \text{ج}$$

$$\text{وه} \left( \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \Rightarrow \text{لوه} = \sqrt{2} \Rightarrow \left[ \text{جاس} \right] + \text{ج}$$

$$\text{لوه} = \sqrt{2} \Rightarrow \text{لوه} + 1 = \sqrt{2} \Rightarrow \text{ج} = \sqrt{2} - \text{لوه}$$

$$\text{لوه} \left( \frac{\pi}{4} \right) = \text{لوه} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \text{لوه} = \sqrt{2} - \frac{\pi}{4}$$

$$\text{لوه} = \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \text{لوه} - 1 - \text{لوه} = 0$$

$$\text{وه} \left( \frac{\pi}{4} \right) = \text{وه} = \left( \frac{\pi}{4} \right) \Rightarrow \text{وه} = 1$$

مثال (13) :

جد قيمة التكاملات الآتية :

$$(1) \left[ \frac{\text{س}^2 + \text{ظاس}}{\text{جاس}^2 \text{س}} \right]$$

الحل :

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\text{س}^2}{\text{جاس}^2 \text{س}} + \frac{\text{ظاس}}{\text{جاس}^2 \text{س}} \right] = \\ & \left[ \frac{\text{س}^2 \text{قاس}}{\text{جاس}^2 \text{س}} + \frac{\text{ظاس} \text{قاس}}{\text{جاس}^2 \text{س}} \right] = \end{aligned}$$

تعويض

اجزاء

$$\text{ص} = \text{ظاس} \leftarrow \text{س} = \frac{\text{س}}{\text{قاس}}$$

$$\text{وه} = \text{س}^2 \leftarrow \text{وه} = 2 \text{س}$$

$$\left[ \text{ص} \text{قاس} \right] = \frac{\text{س}}{\text{قاس}}$$

$$\text{وه} = \text{قاس}^2 \leftarrow \text{وه} = \text{ظاس}$$

$$2 \text{س} \text{ظاس} - \left[ 2 \text{ظاس} \text{س} \right]$$

$$\text{ص} = \frac{2}{\text{ظاس}} \Rightarrow \text{ج} = \frac{2}{\text{ظاس}}$$

$$2 \text{س} \text{ظاس} + 2 \text{لوه} \left[ \text{جاس} \right]$$

$$2 \text{س} \text{ظاس} + 2 \text{لوه} \left[ \text{جاس} \right] + \frac{2 \text{ظاس}}{\text{ظاس}} + \text{ج}$$

$$(2) \left[ \text{لوه} (\text{س})^2 \text{س} \right]$$

الحل :

$$\text{وه} = \text{لوه} (\text{س})^2 \leftarrow \text{وه} = 2 \text{لوه} (\text{س}) \frac{1}{\text{س}}$$

$$\text{وه} = \text{س} \leftarrow \text{وه} = \text{س}$$

$$\text{س} (\text{لوه} (\text{س})^2) - \left[ \text{لوه} (\text{س})^2 \times \text{س} \right]$$





$$= \left[ \frac{1}{3} \right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$(4) \left[ \frac{1}{3} \right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} = 0$$

الحل :

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$(5) \left[ \frac{1}{3} \right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} = 0$$

الحل :

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

كسور جزئية

مباشر

$$\left[ \frac{1}{3} \right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} = 0$$

$$= \left[ \frac{1}{3} \right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} = 0$$

اجزاء مباشر

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$(2) \left[ \frac{1}{3} \right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} = 0$$

الحل :

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$(3) \left[ \frac{1}{3} \right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} = 0$$

الحل :

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$

$$0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$$



## مثال (١٨) :

(١) يتحرك جسيم حسب العلاقة :  $\frac{لو}{ص} = ع$  ، اذا قطع مسافة (٤) م بعد ثانية واحدة ، احسب المسافة بعد مرور (٢ هـ) من الثانية

الحل :

$$ع = \frac{ف}{ص} = \frac{لو}{ص} \Rightarrow [ف = ع \cdot \frac{لو}{ص}]$$

$$ف = \frac{ص}{ن} \times ن \cdot \frac{لو}{ص} = \frac{ص}{ن} \cdot لو$$

$$ع = \frac{ف}{ص} = \frac{لو}{ص} \Rightarrow \frac{ف}{ص} = \frac{لو}{ص} \Rightarrow ف = ع \cdot \frac{لو}{ص}$$

$$ع = \frac{ف}{ص} = \frac{لو}{ص} \Rightarrow \frac{ف}{ص} = \frac{لو}{ص} \Rightarrow ف = ع \cdot \frac{لو}{ص}$$

$$ع = \frac{ف}{ص} = \frac{لو}{ص} \Rightarrow \frac{ف}{ص} = \frac{لو}{ص} \Rightarrow ف = ع \cdot \frac{لو}{ص}$$

$$ع = \frac{ف}{ص} = \frac{لو}{ص} \Rightarrow \frac{ف}{ص} = \frac{لو}{ص} \Rightarrow ف = ع \cdot \frac{لو}{ص}$$

(٢) اذا كانت  $\frac{1}{ع} = ت$  ،  $ع < ٠$  ، فإذا تحرك جسيم من السكون وقطع مسافة  $\sqrt{١٠}$  بعد مرور (٤) ثواني ، فما المسافة التي قطعها الجسيم

الحل :

$$ع = \sqrt{١٠}$$

$$ع = \sqrt{١٠}$$

$$\frac{ف}{ص} = \frac{لو}{ص}$$

تكامل الطرفين

$$ف = \frac{٢}{٣} \cdot \sqrt{١٠} \times \sqrt{١٠}$$

$$ف = (٤) \cdot \sqrt{١٠}$$

$$ف = \frac{٢}{٣} \cdot (٤) \cdot \sqrt{١٠} \times \sqrt{١٠}$$

$$ف = \sqrt{١٠} - \sqrt{١٠} = ٠$$

$$ف = \sqrt{١٠} - \sqrt{١٠} = ٠$$

$$ف = \sqrt{١٠} - \sqrt{١٠} = ٠$$

$$ت = \frac{١}{ع}$$

$$\frac{ع}{ص} = \frac{١}{ع}$$

$$ع = \frac{١}{ع} \Rightarrow ع^٢ = ١$$

$$\frac{ع}{ص} = \frac{١}{ع} \Rightarrow ع^٢ = ١$$

تحرك من السكون

$$ع = (٠)$$

$$ع = ٠$$

$$\frac{ع}{ص} = \frac{١}{ع} \Rightarrow ع^٢ = ١$$

$$ع = \sqrt{١٠}$$

$$هـ = \frac{٢}{٣} \cdot \sqrt{١٠} + \sqrt{١٠} = \frac{٥}{٣} \cdot \sqrt{١٠}$$

$$هـ = \frac{٢}{٣} \cdot \sqrt{١٠} + \sqrt{١٠} = \frac{٥}{٣} \cdot \sqrt{١٠}$$

$$هـ = \frac{٢}{٣} \cdot \sqrt{١٠} + \sqrt{١٠} = \frac{٥}{٣} \cdot \sqrt{١٠}$$

## مثال (١٧) :

(١) اذا كانت  $٢ = ١٠ - ١٠$  وكانت (٧،١) حرجة فما قاعدة الاقتران

الحل :

$$٢ = ١٠ - ١٠$$

$$٢ = ١٠ - ١٠$$

$$٢ = ١٠ - ١٠$$

لكن (٧،١) حرجة  $\Rightarrow ١ = ٠$  ،  $٤ = ٠$ 

$$٢ = ١٠ - ١٠$$

$$٢ = ١٠ - ١٠$$

$$٢ = ١٠ - ١٠$$

$$٢ = ١٠ - ١٠$$

$$٢ = ١٠ - ١٠$$

$$٢ = ١٠ - ١٠$$

(٢) اذا كان ميل المماس حسب العلاقة  $\frac{٧}{٣ - ٢}$  وكان

يمر بالنقطة (٥،٢) ، فما قاعدة الاقتران

الحل :

$$\frac{٧}{٣ - ٢} = (٢)$$

$$\frac{٧}{٣ - ٢} = (٢)$$

$$\frac{٧}{٣ - ٢} = (٢)$$

$$\frac{٧}{٣ - ٢} = (٢)$$

$$\frac{٧}{٣ - ٢} = (٢)$$

(٣) وضعت (١٠٠) سمكة في بركة ماء بحيث معدل الزيادة (ع) يساوي  $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$  ، فما عدد السمك بعد

(١٢) يوم

**الحل :**

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}} = \frac{ع}{س}$$

$$س \frac{1}{1+\sqrt{2}} = ع$$

$$ع + \frac{1}{2}(1+\sqrt{2}) = س \frac{1}{2}(1+\sqrt{2}) = ع$$

لكن ع (٠) = ١٠٠ = ج + ١ < ١٠٠ = ج < ٩٩

$$ع (١٢) = ٩٩ + ٢٥\sqrt{2} = ١٠٤$$

(٤) يتناقص حجم الماء في بركة بمعدل  $(\frac{1}{2})$  حجمها سنويا اذا كان حجم الماء الآن هو (٢٠ هـ) ، فما حجم الماء بعد (٢٠) سنة

**الحل :**

$$س \frac{1}{1.2} = \frac{ع}{ع} \leq \frac{1}{1.2} = \frac{ع}{س}$$

$$لور = ع + \frac{1}{2} = ج$$

لإيجاد (ج) < ع = هـ ٢٠ عندما هـ = ٠

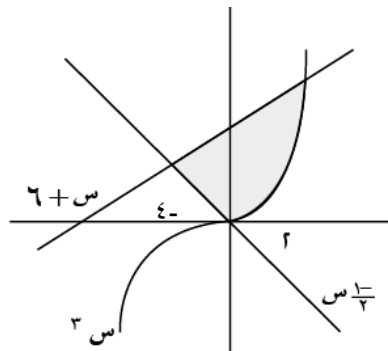
$$لور هـ ٢٠ = ٠ + ج < ج = ٢٥$$

$$عند هـ = ٢٠ \leq لور = ع + \frac{1}{2} \times ٢٠ + ٢٥ = ٢٣$$

**مثال (١٩) :**

(١) احسب المساحة المحصورة بين  $س = ٣$  و  $س = \frac{1}{3}$  ،  $س = ٦ + ٤$

**الحل :**



$$س = ٣$$

$$س = \frac{1}{3}$$

$$س = ٣ + \frac{1}{3} = ٠$$

$$س = (\frac{1}{3} + ٢) = ٠$$

$$س = ٠ \checkmark$$

$$س = ٣$$

$$س = ٣ + ٦ = ٩$$

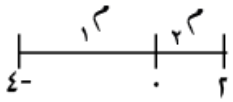
$$س = ٣ - ٦ = -٣$$

$$\checkmark ٢ = س$$

$$س = ٣$$

$$س = ٦ + ٦ = ١٢$$

$$\checkmark ٤ = س$$

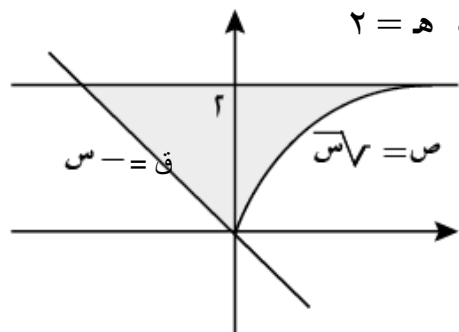


$$٢ = \int_{-٤}^{\frac{1}{3}} (س - (٦ + س)) + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} (س - (٦ + س)) = ٢$$

$$٢٢ =$$

(٢) احسب المساحة بين  $س = \sqrt{س}$  و  $س = -٢$  ،  $س = ٢$

**الحل :**

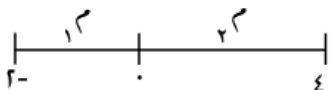


$$س = ٢$$

$$س = ٢ - ٢ = ٠$$

$$س = \sqrt{س}$$

$$س = ٠$$



$$٢ = \int_{-٢}^{\frac{1}{3}} (س - ٢) + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} (س - ٢) = ٢$$

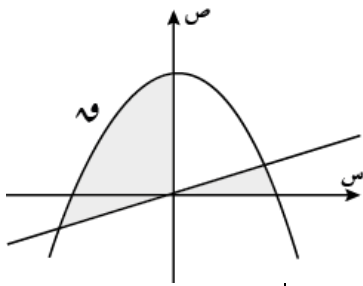
$$٢ = \int_{-٢}^{\frac{1}{3}} (س - ٢) + \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{3}} (س - ٢) = ٢$$

$$\frac{1}{3} = (٠) - (\frac{1}{3} - ٨) + (٢ + ٤) - ٠ =$$

٥) معتمداً على الرسم احسب المساحة المحصورة بين  
وه  $(س) = ٤ - س^٢$  والمستقيم هـ  $(س) = ٣$

**الحل :**

نجد نقاط التقاطع



هـ = وه

$$٠ = وه$$

$$٣ = ٤ - س^٢$$

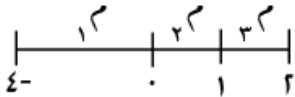
$$٠ = ٣ - س^٢$$

$$٠ = ٤ - س^٣ + س^٢$$

$$٢ - ٤ = س$$

$$٠ = (١ - س)(٤ + س)$$

$$١ = س, ٤ - = س$$

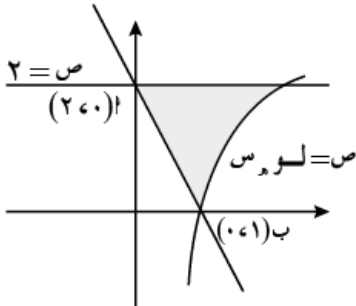


$$٣^٢ + ٢^٢ + ١^٢ = ٢$$

$$٢ = \int_{-1}^1 (٤ - س^٢ - ٣) دس = \int_{-1}^1 (١ - س^٢) دس = \left[ س - \frac{س^٣}{٣} \right]_{-1}^1 = \left( ١ - \frac{١}{٣} \right) - \left( -١ + \frac{١}{٣} \right) = \frac{٢}{٣} - \left( -\frac{٢}{٣} \right) = \frac{٤}{٣}$$

$$\frac{١٣١}{٦} = ٢$$

٦) معتمداً على الرسم احسب المساحة المحصورة بين



**الحل :**

نجد معادلة ب

$$٢ - = \frac{٠ - ٢}{١ - ٠} \text{ الميل}$$

المعادلة :

$$٢ - = ٠ - (١ - س) \Rightarrow ٢ - = س + ٢$$

$$٢ = س \Rightarrow س = هـ$$

$$٢ = \int_0^1 (٢ - س^٢ - ٢س) دس = \left[ ٢س - \frac{س^٣}{٣} - س^٢ \right]_0^1 = \left( ٢ - \frac{١}{٣} - ١ \right) - ٠ = \frac{٢}{٣}$$

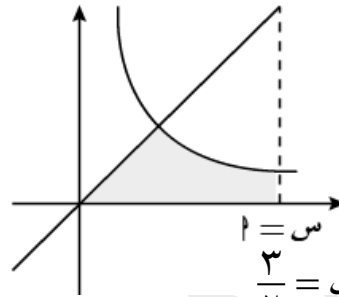
اجزاء

$$٢ - هـ = ٢$$

٣) اذا كانت المساحة بين محور السينات ومنحنى  
ص = س و منحنى ص =  $\frac{١}{س}$  والمساحة تقيم

س = ٢, ١ < ٢ تساوي  $\left(\frac{٢}{٣}\right)$  فما قيمة (٢)

**الحل :**



$$س = \frac{١}{س} \Rightarrow س^٢ = ١$$

$$١ - ١ = س \Rightarrow$$

$$٢ = \int_1^2 \left( س - \frac{١}{س} \right) دس = \left[ \frac{س^٢}{٢} - \ln س \right]_1^2 = \left( \frac{٢^٢}{٢} - \ln ٢ \right) - \left( \frac{١^٢}{٢} - \ln ١ \right) = \frac{٣}{٢} - \ln ٢$$

$$\frac{٣}{٢} = \ln ٢ + \left[ \frac{س^٢}{٢} \right]_1^2 = \ln ٢ + \left( \frac{٢^٢}{٢} - \frac{١^٢}{٢} \right) = \ln ٢ + \frac{٣}{٢}$$

$$\frac{٣}{٢} = \ln ٢ + \frac{١}{٢} = \ln ٢ + \frac{١}{٢}$$

$$\frac{٣}{٢} = \ln ٢ + \frac{١}{٢} \Rightarrow \ln ٢ = \frac{١}{٢} \Rightarrow ٢ = e^{\frac{١}{٢}}$$

٤) احسب المساحة بين وه = س^٢ ومحور السينات  
والمماس لمنحنى وه عند (٢, ٤)

**الحل :**

نحتاج معرفة معادلة المماس

$$وه = س^٢ \Rightarrow ٢ = ٢ \times ٢ = ٤$$

معادلة المماس : ص - ص = ص - ص = (س - س)

$$ص - ص = ٤ - (٢ - س)$$

$$ص - ص = ٤ - ٢ + ٢س$$

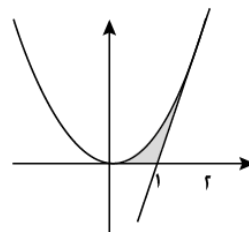
لدينا وه = س^٢ / ص = ٤ - ص / ومحور السينات

$$س^٢ = ٤ - ص \Rightarrow س^٢ = ٤ - ٢س$$

$$٠ = ٤ - ٢س \Rightarrow ٠ = ٤ + ٢س - ٢س$$

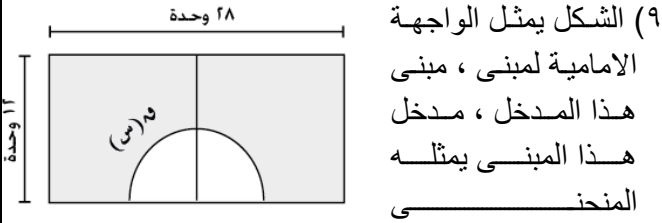
$$٠ = (٢ - س)(٢ - س) \Rightarrow ٢ = س$$

$$٢ = \int_0^2 (٢ - س^٢ - ٢س) دس = \left[ ٢س - \frac{س^٣}{٣} - س^٢ \right]_0^2 = \left( ٤ - \frac{٨}{٣} - ٤ \right) - ٠ = -\frac{٨}{٣}$$



$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos x) - (1 + \sin x) dx = 2$$

$$\frac{4}{2\sqrt{2}} = 2$$



٩) الشكل يمثل الواجهة الامامية لمبنى ، مبنى هذا المدخل ، مدخل هذا المبنى يمثل المنحني

قرشا

الحل :

نجد نقاط التقاطع مع محور السينات

١٦ = ٢س

٤ ± = س

٠ =  $\frac{٢}{٢}س - ٨ = ٨$

$\frac{٢}{٢}س = ٨$

المساحة المطلوبة = مساحة المستطيل - مساحة تحت المنحني

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{٢}{٢}س - ٨ \right) dx - ٢٨ \times ١٢ = ٢$$

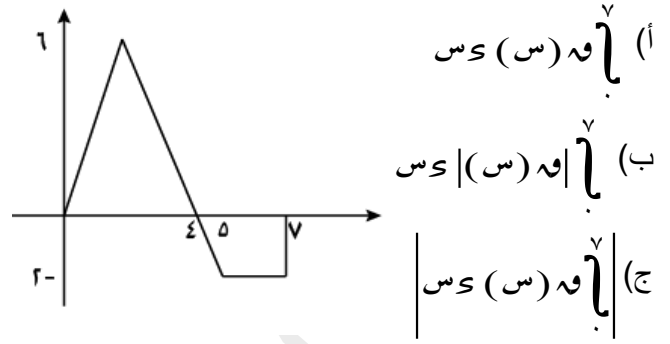
$$\left( \left[ \frac{٢}{٢}س - ٨ \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \right) - ٣٣٦ =$$

$$\left( \left( \frac{٢}{٢} \times \frac{\pi}{2} - ٨ \right) - \left( \frac{٢}{٢} \times \frac{\pi}{4} - ٨ \right) \right) - ٣٣٦ =$$

$$\frac{٨٨٠}{٣} = \frac{١٢٨}{٣} - ٣٣٦ =$$

$$\frac{٣٥٢٠٠}{٣} = ٤٠ \times \frac{٨٨٠}{٣} = \text{التكاليف}$$

٧) معتمدا على الرسم احسب ما يلي :



(د) المساحة بين  $f$  ومحور السينات على  $[٧, ٠]$

الحل :

$$\int_0^2 f(x) dx = 12 = 6 \times 4 \times \frac{1}{2} = ١٢$$

$$\int_2^4 f(x) dx = 1 = 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = ١$$

$$\int_4^7 f(x) dx = 4 = 2 \times 2 = ٤$$

$$\int_0^7 f(x) dx = 12 + 1 + 4 = ١٧$$

$$\int_0^7 |f(x)| dx = 12 + 1 + 4 = ١٧$$

$$\int_0^7 |f(x)| dx = 12 + 1 + 4 = ١٧$$

$$١٧ = ١٢ + ١ + ٤ = ١٧$$

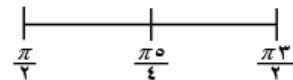
٨) احسب المساحة بين  $f$  و  $g(x) = 1 + \cos x$  ،

هـ  $g(x) = 1 + \cos x$  ، على  $\left[ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$

الحل :

$$f = g \Leftrightarrow 1 + \cos x = 1 + \sin x$$

$$\cos x = \sin x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$$



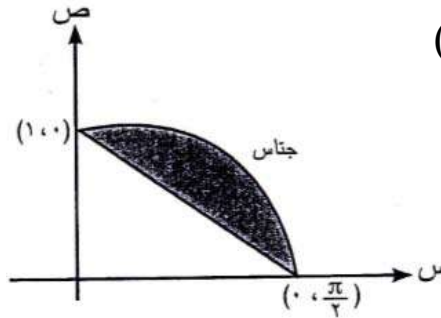
١٠ احسب مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران  
ص = جئاس والقطة المستقيمة الواصلة بين النقطتين

$$(١٤٠) ، (٠ ، \frac{\pi}{4})$$

**الحل :**

نجد معادلة

القطة المستقيمة



$$\frac{2-\pi}{\pi} = \frac{0-1}{\frac{\pi}{4}-0} = \text{الميل}$$

$$\text{المعادلة : } \frac{2-\pi}{\pi} = 1 - \text{ص} \quad (0 - \text{س})$$

$$\text{ص} = 1 + \frac{2-\pi}{\pi}$$

$$= 2 \left[ \text{جئاس} - \left( 1 + \frac{2-\pi}{\pi} \right) \text{س} \right]$$

$$= \text{جئاس} + \frac{\text{س}}{\pi} \times \frac{\pi}{4} + \frac{\text{س}}{\pi} \times \frac{\pi}{4}$$

$$= \left( \frac{\pi}{4} - 1 \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + 1 = 0 - \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \right) \times \frac{1}{\pi} + \frac{\pi}{4} =$$

